1. Wie lautet die allgemeine Geradengleichung? (Mit Erklärung)
2. Ein Telefontarif kostet 15€ Grundgebühr und pro Stunde 8 cent.
Wie lautet allgemein die Gleichung für solch einen Tarif? (Mit Erklärung)
3. Wie lässt sich die zu einer Geraden gehörende Gleichung ermitteln ?

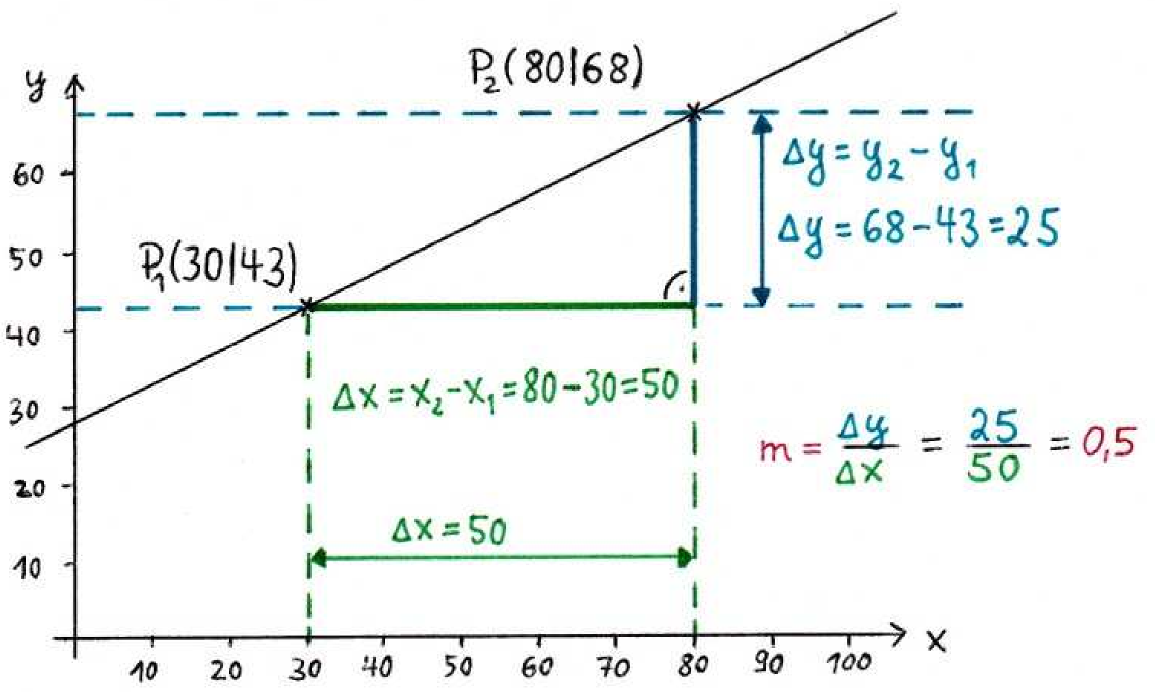
Antworten:

1. $y = m \cdot x + b$ m: Steigung der Geraden; b: y-Achsenabschnitt

2. $y = m \cdot x + b$ y: Gesamtkosten in €.
m: Preis pro Stunde Telefonieren in €
x: Gesamtgesprächsdauer in h
b: Grundgebühr in €
$m = 0{,}08 \quad b = 15$

3. **a.)** Den Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse ablesen. Dies ist der y-Achsenabschnitt b.

b.) Ein Steigungsdreieck einzeichnen.



c.) Die Steigung ergibt sich aus: senkrechte Seite geteilt durch waagrechte Seite.
Verläuft die Gerade durch die Punkte $P_1(x_1|\, y_1)$ und $P_2(x_2|\, y_2)$, so errechnet sich die Steigung so:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Im obigen Beispiel ist $b = 28$ mit $P_1(30|\,43)$ und $P_2(80|\,68)$. Somit ist $m = 0{,}5$ (siehe Bild).
Die Gleichung dieser Geraden lautet: $y = 0{,}5 \cdot x + 28$

4. Es sind zwei Punkte gegeben, durch die eine Gerade verläuft. Bestimmen Sie die Geradengleichung.
5. Gegeben sind die Gleichungen von zwei Geraden. Wie kann der Schnittpunkt dieser beiden Geraden rechnerisch ermittelt werden? Beispiel: $y = 5x + 2$ und $y = 3x + 12$
6. Was ist bei der Äquivalenzumformung von Gleichungen zu beachten?
7. Wie können Sie überprüfen, ob Sie eine Formel richtig umgestellt haben?

Antworten:

4. Beispiel: P1(40|18) und P2(60|22).

a.) Steigung bestimmen: $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) = (22 - 18) / (60 - 40) = 4 / 20 = 0{,}2$

b.) m und die Koordinaten eines Punktes in $y = m \cdot x + b$ einsetzen: $18 = 0{,}2 \cdot 40 + b$

c.) Diese Gleichung nach b auflösen: $18 = 8 + b \;|\; -8 \qquad b = 10$

Das ist die Lösung: $y = 0{,}2x + 10$

Hinweis: Anstatt $y = 18$ und $x = 40$ einzusetzen, können auch die Koordinaten des zweiten Punktes eingesetzt werden, also $y = 22$ und $x = 60$. Das Ergebnis ist das Gleiche.

$22 = 0{,}2 \cdot 60 + b \quad | -12 \qquad b = 10$

5. **a.)** die beiden Gleichungen gleichsetzen: $5x + 2 = 3x + 12$
b.) Die Gleichung nach x auflösen.

$$5x + 2 = 3x + 12 \;|\; -3x \;\; -2$$
$$2x = 10 \;|\; :2$$
$$x = 5$$

c.) y-Wert durch einsetzen ermitteln. $y = 5 \cdot 5 + 2 = 27$; $y = 3 \cdot 5 + 12 = 27$

Schnittpunkt: S(5|27) (erster Wert: die x-Koordinate; zweiter Wert: die y-Koordinate)

6. Es wird die schwächste Bindung zuerst aufgelöst. Die Bindungen sind (von schwach bis stark): Strichrechnung, Punktrechnung, Potenzen, Klammern.

7. Setzen Sie in die Ausgangsgleichung für alle Variablen Werte ein, so dass die Gleichung erfüllt wird. Alle Werte sollen unterschiedlich und möglichst einfach sein. Die Zahlen 0 oder 1 dürfen nicht verwendet werden. Setzen Sie dann diese Werte in die umgestellte Formel ein und prüfen Sie, ob die Gleichung erfüllt wird. (Achtung: dies ist kein Beweis, dass Sie korrekt umgestellt haben. Die Probe könnte auch zufällig stimmen, obwohl Sie einen Fehler gemacht haben).

Beispiel zu 6. + 7.:
Es ist die Gleichung $a = b + (c + d) \cdot e$ nach c aufzulösen!

Diese Werte erfüllen die Gleichung: $b = 5$, $c = 4$, $d = 3$, $e = 2$, $a = 19$

Das sind die erforderlichen Rechenoperationen: $| -b \;| :e \;| -d$

Das ist die Lösung: $c = \frac{a - b}{e} - d$ Probe: $4 = \frac{19 - 5}{2} - 3 = \frac{14}{2} - 3 = 7 - 3 = 4$

8. Was ist beim Multiplizieren von Summen und Produkten zu beachten?
9. Wie wird ein Bruch mit einer ganzen Zahl multipliziert?
10. Wie wird ein Bruch durch eine ganze Zahl dividiert?
11. Wie werden zwei Brüche addiert?
12. Wie werden zwei Brüche multipliziert?

Antworten:

8. Wenn eine Summe multipliziert wird, ist jeder Summand zu multiplizieren.
Beispiel: $6 + 4 = 10 \mid \cdot 2$ $\quad 12 + 8 = 20$
Wenn ein Produkt multipliziert wird, ist nur ein Faktor zu multiplizieren.
Beispiel: $4 \cdot 10 = 40 \quad \mid \cdot 2$ $\quad 8 \cdot 10 = 80$ oder $4 \cdot 20 = 80$

Weitere Beispiele:

$(x+3)\cdot(\frac{x}{4}+1) = 33 \quad \mid \cdot 2$ $\qquad (2x+6)\cdot(\frac{x}{4}+1) = 66$ oder $(x+3)\cdot(\frac{x}{2}+2) = 66$

Es darf nur ein einziger Faktor multipliziert werden, welcher spielt keine Rolle.

$4 + x + \frac{y}{5} = 0{,}1 \quad \mid \cdot 10$ $\qquad 40 + 10x + 2y = 1$ $\qquad$ Es wird jeder Summand multipliziert.

9. Es wird nur der Zähler multipliziert. Beispiel: $2 \cdot \frac{7}{15} = \frac{14}{15}$

10. Es wird entweder nur der Zähler dividiert oder es wird der Nenner mit dieser Zahl multipliziert.
Beispiele: $\frac{7}{15} : 7 = \frac{1}{15}$ $\qquad \frac{a}{b} : a = \frac{1}{b}$ $\qquad \frac{2}{7} : 3 = \frac{2}{7 \cdot 3} = \frac{2}{21}$ $\qquad \frac{b}{a} : a = \frac{b}{a^2}$

Übungsaufgabe zu den Fragen 8 bis 10: Führen Sie die folgende Rechenoperation aus.

$\frac{a}{b} + \frac{c}{a} = d + e \cdot a \quad \mid : a$ $\qquad$ Stellen Sie Ihr Ergebnis in dieser Form dar: □ + □ = □ + □
Machen Sie die Probe mit den folgenden Werten: a = 10 ; b = 2 ; c = 320 ; d = 7 ; e = 3

11. Die Brüche müssen zunächst auf den gleichen Nenner gebracht werden.

Beispiel: $\frac{3}{8} + \frac{5}{12} = \frac{9}{24} + \frac{10}{24}$

Dann werden nur die Zähler addiert. Der gemeinsame Nenner bleibt unverändert: $\frac{9}{24} + \frac{10}{24} = \frac{19}{24}$

Haben beide Brüche schon den gleichen Nenner, werden nur die Zähler addiert: $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$

12. Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner. Beispiel: $\frac{3}{8} \cdot \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 7}{8 \cdot 5} = \frac{21}{40}$

13. Wie kann man durch einen Bruch teilen?
14. Worauf ist beim Kürzen von Brüchen zu achten!
15. Nennen Sie die drei binomischen Formeln!
16. Beschreiben Sie die Lage der Parabel mit der Gleichung: $y = f(x) = a(x + b)^2 + c$
17. Wie löst man quadratische Gleichungen ?

<u>Antworten:</u>

13. Indem man mit dem Kehrwert (Zähler und Nenner vertauscht) multipliziert.

Beispiel: $\frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$

14. Es darf nie aus einer Summe gekürzt werden.

Hier ist das Kürzen kein Problem: $\frac{12}{20} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{3}{5}$

Bei den folgenden Beispielen darf nicht direkt gekürzt werden, sondern es muss erst der gemeinsame Faktor ausgeklammert werden. Erst dann darf aus dem Produkt gekürzt werden:

Erstes Beispiel: $\frac{12x + 4}{4} = \frac{4 \cdot (3x + 1)}{4} = 3x + 1$

Zweites Beispiel: $\frac{15x^4 + 20x^3 + 35x^2}{40x^3} = \frac{5x^2 \cdot (3x^2 + 4x + 7)}{5x^2 \cdot 8x} = \frac{3x^2 + 4x + 7}{8x}$

15.

1.	$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$	$(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$
2.	$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$	$(x - 6)^2 = x^2 - 12x + 36$
3.	$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$	$(x + 5) \cdot (x - 5) = x^2 - 25$

16. $|a| > 1$: die Parabel ist gestreckt. $|a| < 1$: die Parabel ist gestaucht
$a > 0$: die Parabel ist nach oben geöffnet $a < 0$: die Parabel ist nach unten geöffnet
b: Verschiebung der Parabel in negativer x-Richtung, also waagrecht nach links.
c: Verschiebung der Parabel in positiver y-Richtung, also senkrecht nach oben.
Koordinaten des Scheitelpunktes: $S(-b|c)$

17. Wenn die Gleichung $2x^2 + 42 = 20x$ nach x aufgelöst werden soll, ist so vorzugehen:
a.) Alle Terme auf eine Seite rüberholen: $2x^2 + 42 = 20x \;|\; -20x \qquad 2x^2 - 20x + 42 = 0$
b.) So teilen, dass wir x^2 erhalten: $2x^2 - 20x + 42 = 0 \;|\; : 2 \qquad x^2 - 10x + 21 = 0$

Die Gleichung ist nun auf die folgende Form gebracht worden: $x^2 + px + q = 0$ $(p,q \in \mathbb{R})$

Mit dieser pq-Formel erhalten wir die Lösung : $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

In diesem Beispiel: $x_{1/2} = -\frac{-10}{2} \pm \sqrt{(\frac{10}{2})^2 - 21} = 5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm \sqrt{4} = 5 \pm 2$

$x_1 = 5 - 2 = 3 \qquad x_2 = 5 + 2 = 7$

18. Wie erkennen Sie beim Prozentrechnen, was 100% entspricht?

Antworten:

1. Beispielaufgabe: Ein Produkt kostet 56 €, nachdem sein Preis um 20% gesenkt wurde.

Der ursprüngliche Preis entspricht den 100%. Somit entsprechen die 56 € 100% - 20%, also 80%.

Hier finden Sie zwei Lösungswege:

80% ≙ 56 €
10% ≙ 7 €
100% ≙ 70 €

$$\frac{x}{100\%} = \frac{56€}{80\%} \quad | \cdot 100\% \qquad x = 56€ \cdot \frac{100\%}{80\%} = 70€$$

Vor der Preissenkung kostete das Produkt 70 €.

2. Beispielaufgabe: Ein Produkt kostet 84 €, nachdem sein Preis um 20% erhöht wurde.

Der ursprüngliche Preis entspricht den 100%. Somit entsprechen die 84 € 100% + 20%, also 120%.

Hier finden Sie zwei Lösungswege:

120% ≙ 84 €
10% ≙ 7 €
100% ≙ 70 €

$$\frac{x}{100\%} = \frac{84€}{120\%} \quad | \cdot 100\% \qquad x = 84€ \cdot \frac{100\%}{120\%} = 70€$$

Vor der Preiserhöhung kostete das Produkt 70 €.

3. Beispielaufgabe: Der Kurs einer Aktie ist zunächst um 30% gefallen und anschließend wieder um 40% gestiegen. Wie hat sich der Aktienkurs insgesamt verändert?

Der Einfachheit halber gehen wir von einem Anfangskurs von 100 €, das entspricht 100%.

Hier finden Sie zwei Lösungswege:

100% ≙ 100 €
70% ≙ 70 €

$$x_1 = 100€ \cdot \frac{70\%}{100\%} = 70€$$

Der Kurs der Aktie fällt zunächst auf 70€.
Dies entspricht jetzt 100%

$$x_2 = 70€ \cdot \frac{140\%}{100\%} = 98€$$

100% ≙ 70 €
10% ≙ 7 €
140% ≙ 98 €

Insgesamt ist der Kurs von 100 € auf 98 € gefallen, der Kurs ist also insgesamt um 2% gefallen.

19. Unter welcher Bedingung darf man Potenzen addieren?
20. Unter welcher Bedingung darf man Potenzen multiplizieren?
21. Wie lauten die fünf Potenzsätze?
22. Was bedeutet ein negativer Exponent?
23. Was bedeutet ein Bruch im Exponenten?
24. Wie lösen Sie die Gleichung $x^n = 100$ nach x bzw. nach n auf?

Antworten:

19. Wenn sowohl Basis als auch Exponent identisch sind.

$4^3 + 4^3 = 2 \cdot 4^3$ $\quad 7 \cdot 3^5 + 6 \cdot 3^5 = 13 \cdot 3^5$

$4^3 + 4^5$ läßt sich nicht vereinfachen $\quad 3^5 + 4^5$ läßt sich nicht vereinfachen

20. Wenn entweder die Basen oder die Exponenten identisch sind (oder beides).

$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$ $\quad 5^3 \cdot 7^3 = 35^3$ $\quad 2^5 \cdot 2^5 = 2^{10}$ $\quad 2^5 \cdot 2^5 = 4^5$ $\quad 2^5 \cdot 3^4$ läßt sich nicht vereinfachen

21.

1.	Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert	$2^4 \cdot 2^7 = 2^{11}$
2.	Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert	$2^8 : 2^5 = 2^3$
3.	Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipl., indem man die Basen multipliziert	$2^5 \cdot 3^5 = 6^5$
4.	Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden divid., indem man die Basen dividiert	$12^4 : 6^4 = 2^4$
5.	Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.	$(2^5)^3 = 2^{15}$

22. Das Minus entfällt und dann wird der Kehrwert gebildet.

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001 \qquad \frac{4}{10^{-2}} = 4 \cdot 10^2 = 400$$

23. Es wird die Wurzel gezogen. Der Exponent 1/n bedeutet: n-te Wurzel.

$$81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3 \qquad 8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4} = 16$$

24. $x^4 = 1296 \mid \sqrt[4]{\ }$ $\quad x = \sqrt[4]{1296} = 6$

$3^x = 243 \qquad x = \log_3 243 = \dfrac{\lg 243}{\lg 3} = 5$

Beispielaufgabe zum Logarithmus: Wie lange dauert es bei einem Zinssatz von 6%, bis ein Kapital von 1.000 € auf 1.593,85 € angewachsen ist?

Wenn Sie eine Zahl um 6% vergrößern, entspricht dies einer Multiplikation mit 1,06 (Zinsfaktor).

$1.000 \cdot 1{,}06^n = 1.593{,}85 \quad | : 1.000 \qquad 1{,}06^n = 1{,}59385$

Mit welcher Zahl ist 1,06 zu potenzieren, um auf 1,59385 zu kommen?

$x = \log_{1,06} 1{,}59385 = \dfrac{\lg 1{,}59385}{\lg 1{,}06} = 8$ Nach 8 Jahren ist das Kapital auf 1.593,85 € angewachsen.

25. Wie können Sie ‚Kommazahlen' einfach ohne Taschenrechner multiplizieren und dividieren?

Beispiele:

a.) $\frac{0,20}{0,05}$ Wie viele 5-cent Münzen benötigen Sie, um auf 20 cent zu kommen? $\frac{0,20}{0,05} = 4$

b.) $\frac{0,0024}{0,0008} = \frac{24}{8} = 3$ Sie können in Zähler und Nenner das Komma jeweils um vier Stellen nach rechts verschieben (Multiplikation mit 10.000)

c.) $\frac{0,08}{0,32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0,25$ Erst Zähler und Nenner mit 100 multiplizieren (erweitern) und dann Zähler und Nenner durch 8 teilen (kürzen).
Ein Viertel von einem Euro sind 25 cent.

d.) $\frac{17,4}{0,1} = \frac{174}{1} = 174$ Zähler und Nenner mit 10 multipliziert (erweitert). Wie viele 10-cent Münzen benötigt man für 17,40 €? Für einen Euro benötigt man zehn 10-cent Münzen und für 17,40 € bentötigt man 174 10-cent Münzen.

e.) $\frac{12}{0,2} = \frac{60}{1} = 60$ Zähler und Nenner mit 5 multipliziert (erweitert). Wie viele 20-cent Münzen benötigt man für 12 €? Für einen Euro benötigt man fünf 20-cent Münzen und für 12 € bentötigt man 12 mal 5 20-cent Münzen, also 60 Münzen.

f.) $\frac{28}{0,04} = \frac{2800}{4} = 700$ Zähler und Nenner mit 100 multipliziert (erweitert) und dann Zähler und Nenner durch 4 teilen (kürzen).

g.) $130 \cdot 0,003 = 0,13 \cdot 3 = 0,39$

Der erste Faktor wird durch 1000 geteilt (Komma um 3 Stellen nach links verschieben) und der zweite Faktor wird mit 1000 multipliziert (Komma um 3 Stellen nach rechts verschieben). Drei mal 13 cent ergeben 39 cent.

h.) $0,02 \cdot 0,003 = 2 \cdot 0,01 \cdot 3 \cdot 0,001 = 6 \cdot 0,00001 = 0,00006$

Sie können die Nullen zusammenzählen: zwei Nullen + drei Nullen ergibt fünf Nullen.

i.) $0,07 \cdot 0,006 = 7 \cdot 0,01 \cdot 6 \cdot 0,001 = 42 \cdot 0,00001 = 0,00042$

Sie können die Nullen zunächst zusammenzählen: zwei Nullen + drei Nullen ergibt fünf Nullen. Dann multiplizieren Sie 0,00001 mit 42 und es sind nur noch vier "führende" Nullen.

j.) $0,9 \cdot 0,4 = 9 \cdot 0,1 \cdot 4 \cdot 0,1 = 36 \cdot 0,01 = 0,36$